Correction

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p), c'est-à-dire $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Question 1 : Quelles sont les valeurs possibles de X ?

X peut prendre des valeurs dans l'ensemble suivant : $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Question 2 : Donnez la formule de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires.

Question 1 : Complétez la propriété suivante :

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Question 2 : Comment s'appelle cette propriété ?

Il s'agit de la linéarité de l'espérance.

Question 3 : Y a-t-il une formule similaire pour la variance ? Si oui, donnez-la.

Il y a 3 manières de répondre à cette question, toutes sont correctes :

- **Non, il n'y en a pas puisque la variance n'est pas linéaire !**
- **Oui, il y a une formule "similaire" pour la variance, mais celle-ci s'applique uniquement si X et Y sont indépendantes :**

$$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y].$$

- **Oui, il y a une formule "similaire" pour la variance, mais attention elle comporte un terme de plus :**

$$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Exercice 3.

Question 1 : Complétez les formules suivantes :

$$\mathcal{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Question 2 : Décrire ce qu'est une loi de Bernoulli, c'est-à-dire les valeurs possibles et les probabilités associées.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (on note $X \sim \mathcal{B}(p)$), alors X peut valoir 1 ou 0 et les probabilités associées sont les suivantes :

- $\mathbb{P}(X=1) = p$**,**
- $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$**.**

Question 3 : Donnez les deux formules de la variance.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right],$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Question 4 : Donnez la formule de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$