

Instructions :

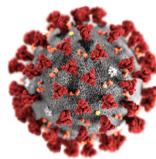
- **Durée :** 1 heure 30
- **Aucun document autorisé**
- **Calculatrice interdite** (les résultats de quelques calculs vous sont donnés à la dernière page)
- Portables, tablettes, ordinateurs, montres connectées et regards sur la feuille du voisin **sont également interdits !**
- **Attention :** le soin, l'orthographe et la qualité de la rédaction font partie intégrante de la notation !

Bonne chance à tous ! 😊

Exercice 1 [5 pts]

Pour lutter contre l'épidémie de Covid-19, un scientifique, appelons-le professeur R., propose de donner un traitement à tous les patients testés positifs dans son hôpital. Le test dont il dispose est fiable à 99%, cela veut dire que si un patient est vraiment infecté, il sera déclaré positif dans 99% des cas ; au contraire, si un patient n'est pas infecté, il sera déclaré négatif dans 99% des cas. Le professeur R. est donc confiant et affirme :

“Puisque le test est fiable à 99%, il y a très peu de chance que je donne mon traitement à un patient non infecté !”.



1. Supposons, et cela semble cohérent avec les chiffres épidémiologiques récents, que 0.5% de la population est infectée par le Covid-19, quelle est la probabilité¹ que le professeur R. donne son traitement à une personne non infectée ? Pensez à bien détailler votre raisonnement et vos calculs.
2. À partir de la réponse à la question précédente, que pouvez-vous dire au sujet de l'affirmation du professeur R. ?

1. Donnez votre résultat en pourcentage approximé avec 1 chiffre après la virgule, par exemple $\approx 48.2\%$.

Exercice 2 [5 pts]

Soit $X \sim \mathcal{B}(10, 1/5)$.

1. Comment s'appelle la loi de X ?
2. Calculez $\mathbb{P}(X = 3)$ (détaillez vos calculs).
3. Combien valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$? (question ultra-rapide, il s'agit juste de donner deux valeurs, pas de re-démontrer des propriétés vues en TD !)

Soit Y une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'ensemble des entiers suivants $\{1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, combien vaut la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$?
2. Combien vaut $\mathbb{E}(Y)$? (détaillez vos calculs).

Exercice 3 [5 pts]

1. Que calcule-t-on à l'aide de l'algorithme d'Euclide ?
2. Que calcule-t-on à l'aide de l'algorithme d'Euclide Étendu ?
3. À quoi sert la fonction phi d'Euler ? Par exemple, si je vous dis que $\phi(2016) = 576$, que pouvez-vous en déduire ?
4. L'inverse modulaire est-il toujours un entier ?
5. Combien y-a-t-il d'éléments dans les groupes suivants :

$$(\mathbb{Z}_{75}, +) \quad \text{et} \quad (\mathbb{Z}_{75}^{\times}, \times).$$

6. Calculez l'inverse de 715 modulo 2016 (détaillez vos calculs).

Exercice 4 [5 pts]

1. Quel est le cardinal du groupe $\mathbb{Z}_{101}^{\times}$?
2. Calculez l'ordre de 5 modulo 101.
3. Calculez l'ordre de 13 modulo 101.
4. Quel lien remarquez-vous entre vos réponses aux questions 2. et 3. et la réponse à la question 1. ?
5. À la pause entre deux cours, un camarade vous dit que l'ordre de 27 modulo 101 vaut 7. Sans faire le moindre calcul supplémentaire, comment pouvez-vous affirmer qu'il se trompe ?
6. Soient $n > 0$ et a deux entiers, à quelle condition l'entier a est-il inversible modulo n ?

Calculs et indications diverses

Remarque : il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les éléments ci-dessous!

Beaucoup d'entre-eux sont là juste pour "cacher" les éléments utiles ☺.

- $5/101 \approx 0.0495$
- $1/13 \approx 0.0769$
- $101/13 \approx 7.769$
- $3 \times 10 \times (1/5) = 6$
- $5^7 = 78125$, $5^{10} = 9765625$ et $4^7 = 16384$
- $2^{10} = 1024$, et $2^{13} = 8192$
- 101 est un nombre premier
- $715 = 5 \times 11 \times 13$ et $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
- $2016 - 1 = 5 \times 13 \times 31$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $99 \times 5 = 495$
- $0.995 \times 0.5 = 0.4975$
- $\frac{0.995 \times 0.5}{(0.1 \times 0.99)^2} \approx 50.76$
- $\frac{995}{1490} \approx 0.6678$
- $\frac{495}{1490} \approx 0.3322$
- $\frac{995}{99 + 495 \times 99} \approx 2.026\%$
- $\frac{800}{500} = 1.6$
- $\frac{16384 \times 120}{9765625} \approx 0.2013$